Sobre triángulos de lados enteros

Autores: *Héctor Rosa Álvarez* [1], *Adrián Tamayo Domínguez* [1]
Tutores: *David Miguel del Río* [2], *Ángel Corral Cedena* [2]

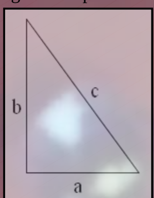
[1] *1ºC Bachillerato, curso 2007/08, I.E.S. Europa (Móstoles) Madrid;.* [2] *Dpto. Matemáticas I.E.S. Europa (Móstoles) Madrid.*

Resumen.- Desarrollaremos nuestras propias expresiones para encontrar todas las ternas pitagóricas y las aplicaremos a la resolución del problema planteado, que es:

Hallar todos los triángulos rectángulos de lados enteros cuya área sea, numéricamente, igual a su perímetro

1 ► Introducción

¿Cómo hallar todos los triángulos rectángulos cuya área sea numéricamente igual a su perímetro?



Según el enunciado del problema tenemos que resolver la siguiente ecuación, aceptando únicamente las soluciones enteras:

$$\begin{aligned}\frac{a\cdot b}{2} &= a+b+c \\ \text{Área} &= \text{Perímetro}\end{aligned} \qquad [1]$$

Como se trata de triángulos rectángulos debemos encontrar expresiones que generen todas las posibles ternas pitagóricas.

2 ► Nuestras fórmulas iniciales

• ***Observando pautas***

Utilizando unas fórmulas encontradas en internet generamos las siguientes ternas: (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), (9,40,41), (11,60,61), (13,84,85), (15,112,113), …

Observamos que:

1) Todos los primeros números de las ternas son impares consecutivos empezando en el 3
2) Todos los segundos números son pares múltiplos de 4 (ver la Tabla 1)

Término	$b_1=4\cdot1$	$b_2=4\cdot3$	$b_3=4\cdot6$	$b_4=4\cdot10$	$b_5=4\cdot15$	...	$b_n=4\cdot S_n$
Nº que multiplica	1 = 1	3 = 1+2	6 = 1+2+3	10 = 1+2+3+4	15 = 1+2+3+4+5	...	S_n = 1+2+3+…+n

Tabla 1.- Factores multiplicativos de la serie de los segundos números de las ternas

3) La diferencia entre el tercer y el segundo número de cada terna es 1

Así obtenemos las siguientes expresiones para las ternas pitagóricas:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= 2n+1 \\ b_n &= 2n + 2n^2 \\ c_n &= 2n + 2n^2 + 1\end{aligned}} \qquad [2]$$

• ***Aplicando las expresiones halladas***

Sustituyendo las expresiones [2] en la ecuación [1], y considerando la posibilidad de que haya ternas múltiplo de otras:

$$\frac{k\cdot a_n\cdot k\cdot b_n}{2} = k\cdot(a_n+b_n+c_n)$$

De donde:

$$k=\frac{2}{n} \Rightarrow k\cdot n = 2$$

Para esta expresión de k existen dos posibles soluciones enteras:

1) k = 1, n = 2 → (5,12,13)

2) k = 2, n = 1 → (6, 8, 10)

3 ► Nuestras fórmulas generales

En nuestro intento anterior las expresiones [2] no generan todas las ternas pitagóricas. Por esto vamos a generar tablas con más ternas para encontrar nuevas regularidades.

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
2(n=1)	1	**3**	**4**	**5**
3	1	*8*	*6*	*10*
4(n=2)	1	$a1_1=15$	$b1_1=8$	$c1_1=17$
5	1	*24*	*10*	*26*
6(n=3)	1	$a2_1=35$	$b2_1=12$	$c2_1=37$
7	1	*48*	*14*	*50*
8(n=4)	1	$a3_1=63$	$b3_1=16$	$c3_1=65$
9	1	*80*	*18*	*82*
10(n=5)	1	$a4_1=99$	$b4_1=20$	$c4_1=101$
11	1	*120*	*22*	*122*
12(n=6)	1	$a5_1=43$	$b5_1=24$	$c5_1=145$
13	1	*168*	*26*	*170*
14(n=7)	1	$a6_1=195$	$b6_1=28$	$c6_1=197$

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
3	2	**5**	**12**	**13**
4	2	*12*	*16*	*20*
5	2	$a1_2=21$	$b1_2=20$	$c1_2=29$
6	2	*32*	*24*	*40*
7	2	$a2_2=45$	$b2_2=28$	$c2_2=53$
8	2	*60*	*32*	*68*
9	2	$a3_2=77$	$b3_2=36$	$c3_2=85$
10	2	*96*	*40*	*104*
11	2	$a4_2=117$	$b4_2=44$	$c4_2=125$
12	2	*140*	*48*	*148*
13	2	$a5_2=165$	$b5_2=52$	$c5_2=173$
14	2	*192*	*56*	*200*

Tabla 2.- Ternas pitagóricas para q=1 y q=2

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
4	3	**7**	**24**	**25**
5	3	*16*	*30*	*34*
6	3	$a1_3=27$	$b1_3=36$	$c1_3=45$
7	3	*40*	*42*	*58*
8	3	$a2_3=55$	$b2_3=48$	$c2_3=73$
9	3	*72*	*54*	*90*
10	3	$a3_3=91$	$b3_3=60$	$c3_3=109$
11	3	*112*	*66*	*130*
12	3	$a4_3=135$	$b4_3=72$	$c4_3=153$
13	3	*160*	*78*	*178*
14	3	$a5_3=187$	$b5_3=84$	$c5_3=205$
15	3	*216*	*90*	*234*
16	3	$a6_3=247$	$b6_3=96$	$c6_3=265$

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
5	4	**9**	**40**	**41**
6	4	*20*	*48*	*52*
7	4	$a1_4=33$	$b1_4=56$	$c1_4=65$
8	4	*48*	*64*	*80*
9	4	$a2_4=65$	$b2_4=72$	$c2_4=97$
10	4	*84*	*80*	*116*
11	4	$a3_4=105$	$b3_4=88$	$c3_4=137$
12	4	*128*	*96*	*160*
13	4	$a4_4=153$	$b4_4=104$	$c4_4=185$
14	4	*180*	*112*	*212*
15	4	$a5_4=209$	$b5_4=120$	$c5_4=241$
16	4	*240*	*128*	*272*
17	4	$a6_4=273$	$b6_4=136$	$c6_4=305$

Tabla 3.- Ternas pitagóricas para q=3 y q=4

• **La primera fila subrayada $a1_n$, $b1_n$ y $c1_n$**

Observamos que:

1) Todos los primeros números de las ternas son múltiplos de 3 y los factores multiplicativos son impares consecutivos a partir del 5
2) Todos los segundos números son múltiplos de 4 (ver la Tabla 5)

Términos de la serie, $b1_n$	$b1_1=8$	,	$b1_2=20$	,	$b1_3=36$	,	$b1_4=56$	,	$b1_5=80$
Diferencia entre los términos, d_n		$+12=3\cdot4$		$+16=4\cdot4$		$+20=5\cdot4$		$+24=6\cdot4$	

Tabla 5.- Obtención de los segundos términos de las ternas pitagóricas de la serie 1

3) El tercer número de cada terna de la serie 1 es $c1_n$: 17, 29, 45, 65, 89,... Buscamos regularidades:

Términos de la serie, $c1_n$	$c1_1=17$	,	$c1_2=29$	,	$c1_3=45$	,	$c1_4=69$	,	$c1_5=89$
Diferencia entre los términos, d_n		$+12=3\cdot4$		$+16=4\cdot4$		$+20=5\cdot4$		$+24=6\cdot4$	

Tabla 6.- Obtención de los terceros términos de las ternas pitagóricas

Así obtenemos las siguientes expresiones para las ternas pitagóricas:

$$a1_n = 2n + 3; \quad b1_n = 2n^2 + 6n; \quad c1_n = 2n^2 + 6n + 9$$

• **Obtención de expresiones para el resto de filas**

Observando regularidades de esa forma obtenemos expresiones para otras filas:

$$a2_n = 10n + 25; \quad b2_n = 2n^2 + 10n; \quad c2_n = 2n^2 + 10n + 25$$

Y, de la misma forma obtener expresiones generales para todas las ternas:

1ª fila (en negrita). Serie 0:	$a0_n=2n+1=(2\cdot1)n+1^2$	$b0_n=2n^2+2n=2n^2+(2\cdot1)n$	$c0_n=2n^2+2n+1=b0_n+1$
2ª fila (1ª subrayada). Serie 1	$a1_n=6n+9=(2\cdot3)n+3^2$	$b1_n=2n^2+6n=2n^2+(2\cdot3)n$	$c1_n=2n^2+6n+9=b1_n+9$
3ª fila (2ª subrayada). Serie 2	$a2_n=10n+25=(2\cdot5)n+5^2$	$b2_n=2n^2+10n=2n^2+(2\cdot5)n$	$c2_n=2n^2+10n+25=b2_n+25$
...	...	...	...
q-ésima fila. Serie i	$aq_n=[2(2q-1)]n+(2q-1)^2$	$bq_n = 2n^2 + [2(2q-1)]n$	$cq_n=2n^2+[2(2q-1)]n+(2q-1)^2$

Tabla 7.- Obtención de los terceros términos generales de las ternas pitagóricas

4 ► Resultados

A partir de las expresiones para cada una de las filas dadas en la Tabla 7, podemos sustituir en la ecuación [1]. A continuación recogemos las soluciones para cada caso:

	Expresión resultante	Soluciones aceptables
1ª fila de ternas. Serie 0	$k\cdot n = 2$	k = 1, n = 2 → (5, 12, 13) k = 2, n = 1 → (6, 8, 10)
2ª fila de ternas. Serie 1	$k\cdot3n = 2$	Ninguna
3ª fila de ternas. Serie 2	$k\cdot5n = 2$	Ninguna
...	...	...
q-ésima fila de ternas. Serie q-1	$k(2q-1)\,n = 2$	

Tabla 8 .- Generalización de las expresiones resultantes para cada serie

Observamos que nada cambia excepto los números que multiplican a la n, que son impares consecutivos. De esta manera concluimos que:

$$k\cdot n = \frac{2}{2q-1}$$

Los triángulos rectángulos que cumplan esta expresión para k, n y q enteros serán las soluciones buscadas. Y son:

1)q = 1, k = 1, n = 2; que es la terna pitagórica: a = 5; b = 12; c = 13

2) q = 1, k = 2, n = 1; que es la terna pitagórica: a = 6; b = 8; c = 10

No habiendo más soluciones para este problema.

5 ► Conclusiones

• **Conclusión 1:**

Aplicando la restricción del Teorema de Pitágoras a la expresión [1] podemos concluir que si abc es un triángulo rectángulo de catetos a y b enteros e hipotenusa c entera, y numéricamente su área vale lo mismo que su perímetro, entonces cumplirá que a + b – c = 4, lo que no es cierto en sentido contrario.

• **Conclusión 2:**

En el trabajo demostramos que los únicos puntos de cruce exactos se corresponden con q = 1 ó q = 2, no siendo posible un cruce exacto para q > 2. Por ello no es posible encontrar otras soluciones distintas a las halladas por nosotros.